PROMEDIOS

Se denomina promedio de un conjunto de números, a una cantidad representativa de todos los números dados y este se encuentra entre el menor y el mayor número.
Sean : a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; …….. ; a_n los números, se cumple : a_1 < Promedio < a_n

TIPOS DE PROMEDIOS

1. *Promedio Aritmético :*

$$P_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Para dos cantidades a y b , se tiene :

$$M_a = \frac{a+b}{2}$$ se le llama MEDIA ARITMETICA

Donde:

* a, b, x_1, x_2, ..., x_n son las cantidades
* n : n° total de cantidades.

Ejemplo: Hallar el promedio aritmético de 2, 3, 7, 9 y 14

Solución:

$$P_a = \frac{2+3+7+9+14}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

Promedio Aritmético Ponderado

$$P_p = \frac{ax+by}{x+y}$$

$$P_p = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

Donde:

* a, b, a_1, a_2, ..., a_n: son cantidades
* x, y, x_1, x_2, ..., x_n: son frecuencias, pesos posiciónales, repeticiones, etc.

Ejemplo : En un salón de clase de 40 alumnos, el promedio de notas del curso de matemáticas es el siguiente: 12 alumnos obtuvieron 15 de promedio., 15 alumnos obtuvieron 12 y los restantes 8 de promedio ¿Cuál es el promedio de los 40 alumnos?

Solución:

$$P_p = \frac{12(15)+15(12)+13(8)}{12+15+13} = 11.60$$

2. *Promedio Geométrico:*

$$P_g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \cdots x_n}$$

Para dos cantidades a y b, se tiene:

$$M_g = \sqrt{a_x b}$$ se le llama MEDIA GEOMETRICA

Ejemplo: Hallar el promedio geométrico de 1/6, 12/7, 63 y 72

Solución:

$$P_g = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{12}{7}\right).63.72} = \sqrt[4]{2^4.3^4} = 6$$

3. *Promedio Armónico :*

$$p_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Para dos cantidades a y b, se tiene:

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$ se le llama MEDIA ARMONICA

Ejemplo: Hallar el promedio armónico de 1, 4 y 8

Solución: $$P_h = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{24}{11}$$

Observación: Por lo general, cuando solamente se menciona la palabra promedio ésta se refiere al promedio aritmético.

Propiedades:

1. Para "n" números diferentes entre sí, se cumple que: $P_h < P_g < P_a$

2. Para 2 números a y b, la M_g es media proporcional entre la M_a y M_h.

$$\frac{M_a}{M_g} = \frac{M_g}{M_h} \rightarrow M_g^2 = M_a \times M_h$$

3. Además:

$$M_a - M_g = \frac{(a-b)^2}{4(M_a + M_g)}$$

PROBABILIDAD

Los eventos aleatorios no son predecibles con absoluta certeza, no obstante podemos medir el grado de confianza con que se hace un pronóstico, sobre la ocurrencia o no de un determinado suceso. En resumen podemos definir a la probabilidad como la posibilidad numérica de la ocurrencia de un seceso o evento.

TIPOS DE PROBABILIDAD

Existen tres enfoques para el estudio de la probabilidad.

Probabilidad Clásica o "a priori"

Llamada también probabilidad a ***priori*** debido a que es posible conocer el resultado con anterioridad, es decir, sin llevar a cabo el experimento y sólo basado en el razonamiento lógico.

Se basa en el supuesto en que cada elemento del espacio muestral tiene la misma posibilidad de ser elegido.

Se calcula a través de:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de ocurrencia del suceso } A}{\text{Total de casos posibles}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Ejemplo1:
Supongamos que en un estudio se trataron a 100 pacientes y de ellos mejoraron 80 pacientes. Si el experimento consiste en seleccionar al azar a uno de los 100 pacientes.
¿Cuál es la probabilidad de que el paciente se haya mejorado?
Solución:

Suceso A: El paciente se mejora

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de ocurrencia del suceso } A}{\text{Total de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{n^{o}\text{ pacientes que se mejoran}}{n^{o}\text{ total de pacientes}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{80}{100} = 0.8$$

Ejemplo 2:
Hallar la probabilidad de obtener un número mayor que 4 en el lanzamiento de un dado.
Solución:

El espacio muestral será: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sea el suceso B: Obtener el número mayor que 4
Entonces:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Longrightarrow P(B) = 2/6 = 0.333é$$

La probabilidad clásica, se utiliza para experimentos simples, como los mencionados anteriormente. En la vida real se presentan situaciones más complejas que requieren el cálculo de probabilidad desde otro enfoque.

10.5.2 Probabilidad "a posteriori" o de Frecuencia Relativa
El cálculo de este tipo de probabilidad se basa en la repetición de la ocurrencia de un evento, al realizar una gran cantidad de pruebas o experimentos.
La probabilidad de frecuencia relativa, es llamada también empírica o a posteriori, debido a que obtiene el resultado después de llevar a cabo el experimento.

Se halla a través de:

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurrio el suceso } A}{\text{Número total de observaciones}} = \frac{f}{n}$$

OPERADORES MATEMÁTICOS

Operación matemática: procedimiento que transforma cantidades por medio de una regla de formación previamente establecida.
Operador matemático: son símbolos que representan una operación matemática.
Operadores Binarios: Llamados así a aquellos que asocian una pareja de números con un resultado o tercer número. La adición, sustracción, multiplicación y división son operaciones binarias pero no son los únicos. Se pueden definir "nuevas" operaciones binarias asignándoles un operador que los distingue de los que ya conocemos. No debemos olvidar que cada "nuevo" operador debe acompañarse de la regla o fórmula que la define.

Fórmula o Regla de Formación

Ejemplo:

$$a \# b = 3a^4 - 2b$$

Operación Binaria

Elementos: $a \# b = 3a^4 - 2b$

a y b : Cantidades a operar

\# : Operador matemático (Grilla)

Operadores Gráficos: Son aquellos operadores que en lugar de ir símbolos que relacionan a las cantidades a operar, van gráficos de figuras geométricas u otras, siendo el proceso de desarrollo similar a cualquier operador matemático.

Ejemplo: se define el operador rectángulo de la siguiente manera:

[4x] = x + 5. Hallar: [9]

Simplemente a [9] le damos la forma del operador:

[9] = [4(9/4)] = 9/4 + 5 = 29/4

Operadores Binarios definidos por tablas: En lugar de una fórmula para hallar resultados, la operación Binaria puede presentar estos resultados en una tabla, que consulta siguiendo pautas establecidas.

Ejemplo: En la siguiente tabla: Calcular: $(7\phi 7) + (5\phi 9) - (9\phi 7)$

ϕ	5	7	9
5	7	5	9
7	5	9	7
9	9	7	5

a) 10 b) 11 c) 13 d) 15 e) 16

Solución:

ϕ		7	
		|	
7	—	9	

ϕ			9
5	—	—	9

ϕ		7	
		|	
		|	
9	—	7	

(7ϕ 7)= 9 (5ϕ 9)=9 (9ϕ 7)= 7

→ E = (7ϕ 7) + (5ϕ 9) - (9ϕ 7)

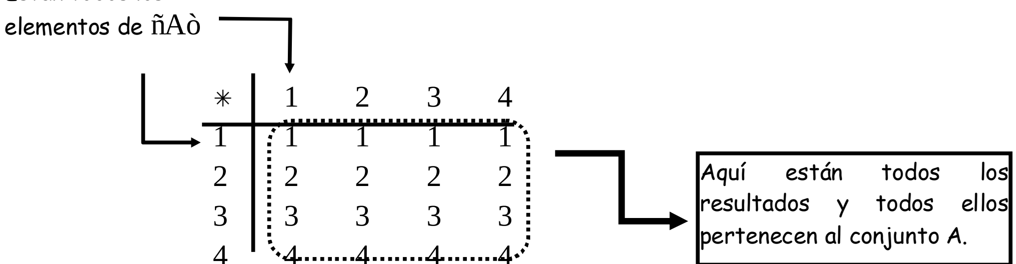
E = 9 + 9 - 7 = 11

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

1. CLAUSURA O CERRADURA: $\forall$ a $\wedge$ b $\in$ A Ÿ a ✳ b $\in$ A

En tablas:
Ejemplo: En A = {1, 2, 3, 4}
Se define:

Están todos los elementos de ñAò



✳	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

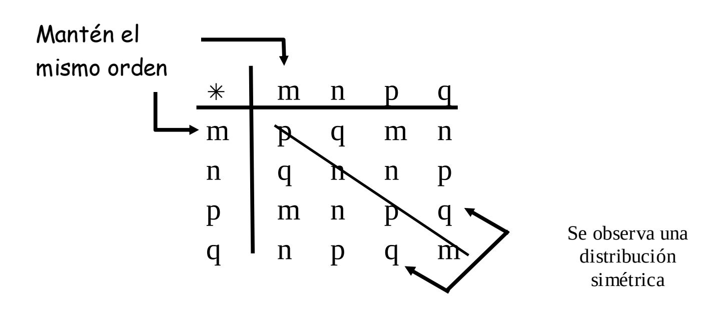
Aquí están todos los resultados y todos ellos pertenecen al conjunto A.

∴ La operación "✳" es cerrada en A.

2. CONMUTATIVA: $\forall$ a $\wedge$ b $\in$ A Ÿ a ✳ b =b ✳ a

En caso de tablas:
Dada:

Mantén el mismo orden



✳	m	n	p	q
m	p	q	m	n
n	q	n	n	p
p	m	n	p	q
q	n	p	q	m

Se observa una distribución simétrica

∴ La operación (✳) es conmutativa.

3. ASOCIATIVA: $\forall$ a, b, c $\in$ A Ÿ a ✳(b✳c) = (a✳b) ✳ c

4. ELEMENTO NEUTRO(**e**) : $\exists$! **e**$\in$A / Para todo "a" se tiene que: a ✳ e = e✳ a = a

5. ELEMENTO INVERSO (a^{-1}): $\forall$ a $\in$ A $\exists$! a^{-1} / a ✳ a^{-1} = a^{-1} ✳ a = **e**

Operador no Binario: No siempre las ecuaciones deben aplicarse a dos elementos, el número de elementos que se operan pueden variar en cada definición.

Ejemplo 1 : n! = 1 x 2 x 3 x 4 .... x n

Ejemplo 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = a . d – b . c

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo. Hallar el promedio aritmético de 6 números enteros consecutivos, sabiendo que la media armónica del mayor y el menor es 12.

a) 12,2 b) 12,5 c) 12,75 d) 12,8 e) Más de 12,8

solución: 6 números consecutivos: x ; x+1; x+2 : x+3 : x+4 y x+5

$M_h = \frac{2.x(x+5)}{x+x+5} = 12$ Ÿ $2x^2 + 10x = 24x + 60$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

x = 10

luego P_a=(10+11+12+13+14+15)/5 =**12.5**

ejemplo: El promedio aritmético de 3 números enteros es 14. El promedio geométrico es par e igual a uno de los números y su promedio armónico es $\frac{72}{7}$. Hallar el mayor de dichos números.

a) 6 b)24 c)30 d)56 e)82

solución:

$P_c = \frac{a+b+c}{3} = 14$, luego: a + b + c = 42

$P_g = \sqrt[3]{a.b.c} = c$, luego: a.b = c^2

$P_h = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3a.b.c}{a.b+b.c+a.c} = \frac{72}{7}$

$$\frac{3c^3}{c^2+c(a+c)} = \frac{72}{7}$$

$$\frac{c^3}{c^2+c(42-c)} = \frac{24}{7}$$

$$\frac{c^3}{42c} = \frac{24}{7}$$

Luego c = 12

Así: a + b = 30 y a.b = 144

Luego a=24 y c = 6

Rpta: b) 24

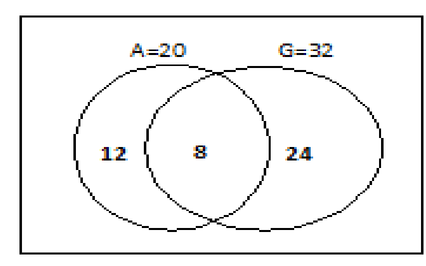
Ejemplo: De 100 pacientes examinados, 20 padecían de artritis, 32 padecían de gastritis y 8 tenían ambos males. Hallar la probabilidad de seleccionar un paciente que padezca de artritis o gastritis

a) 0,44 b) 0,22 c) 0,4 d)1 e) 0,6.

Solución:

Suceso A: El paciente padezca de artritis o gastritis

El número de casos de ocurrencia del suceso es 44. Como se muestra en la figura.



$n(A \cup G) = 20+24 = 44$

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de ocurrencia del suceso A}}{\text{Total de casos posibles}} = 44/100 = 0,44$$

Ejemplo: Se lanzan dos dados al mismo tiempo. Hallar la probabilidad de que la suma de los resultados de los dos sean igual a 10.

a) 1/3 b)1/2 c) 1/6 d) 1/12 e)1/8

solución:

Suceso A: la suma de los resultados de los dos dados sea igual a 10.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de ocurrencia del suceso A}}{\text{Total de casos posibles}} = 3/36 = 1/12$$

Casos favorables: 4+6 ; 5+5 ; 6+4

Ejemplo: si $x\nabla y = x^2 + 5y$. Calcular: $2 \nabla 5$

a) 21 b) 9 c) 27 d) 20 e) 17

Solución: $x\nabla y = x^2 + 5y$

$2 \nabla 5 = 2^2 + 5(5) = 29$

Ejemplo: Si $(a @ b) = 3a^2 - 5$, Calcular: (2 @ 5) (5 @ 1000)

a) 42 b) 440 c) 490 d) 560 e) 630

Solución: $(a @ b) = 3a^2 - 5$

$2 @ 5 = 3(2)^2 - 5 = 7$

$5 @ 1000 = 3(5)^2 - 5 = 70$ $\therefore$ (2 @ 5) (5 @ 1000) = 7(70)= 490

MATEMÁTICAS

Hola: En esta sección voy a contar historias, trucos y curiosidades relacionados con las matemáticas. Por supuesto, es en plan Hobby, no voy a demostrar ningún teorema complicado ni nada de eso.

TRUCO PARA DEJAR BOQUIABIERTA A LA GENTE EN REUNIONES DE AMIGOS

El truco es el siguiente: Pide a alguien que escriba un número de cuatro cifras. En un papel aparte resta 2 a esa cifra y le pones un 2 delante:
Ejemplo: Si escriben 2435 ustedes escriben 22433
Escribe el número aparte, sin que nadie vea. Después pide a alguien que escriba otro número de 4 cifras debajo. Una vez hecho esto, diles que el siguiente lo vas a escribir tu. Tienes que completar con nueves (es decir, hacer que la suma de tu cifra y la anterior de todo nueves).
Ejemplo: Si el primer número que han puesto es el 2435 y el segundo el 2354
2435
2354
7645
Hemos puesto el 7645 porque 7 + 2 = 9, 6 + 3 = 9, 5 + 4 = 9 y 4 + 5 = 9. Tienes que ponerlo simulando que lo pones al azar.
Una vez hecho esto, repetimos la operación otra vez, decimos que pongan otro número de cuatro cifras debajo, y nosotros volvemos a poner otro completando a nueves con el anterior.
2435
2354
7645
4278
5721
Ahora viene lo bueno: decimos a alguien que sume toda la columna. El resultado será el número que previamente habíamos copiado en un papel. Consejo: verificar antes porque casi todo el mundo se equivoca al hacer la suma.
Explicación: No tiene nada de misterioso. Fijémonos en los pares 2-3 y 4-5 de la columna. Ambos suman 9999, por lo que los 4 suman 19.998. Es decir, 20.000 menos 2. Sumado a la primera cifra es lo mismo que restarle 2 y ponerle un 2 delante.

DE COMO GAUSS LE TOMÓ EL PELO A SU PROFESOR CON SOLO 10 AÑOS

Pues la historia es la siguiente: estaba Carl Friedrich Gauss allá por el año 1787 en la escuela. Tenía unos 10 años de edad. Con esa edad pasó lo que tenía que pasar, todos los niños empezaron a tirarse papeles, tizas, etc.
En ese momento apareció el profesor y molesto como estaba, ordenó a todos los niños que, como castigo, le sumaran todos los números del 1 al 100.
El profesor debió pensar: ¡que idea mas buena he tenido!. ¡Durante un buen rato, me dejarán todos estos mocosos en paz!.
A los pocos minutos, nuestro pequeño genio se levantó del pupitre, y entregó la respuesta correcta: 5050. El profesor, asombrado, debió pensar que había puesto un número al azar, y se dispuso él mismo a hacer la interminable suma. Al cabo de un buen rato, comprobó que, efectivamente, la suma pedida era 5050.
No es que Gauss fuera un calculador extraordinario, capaz de hacer sumas a la velocidad de un ordenador moderno. Gauss llegaría a ser uno de los mejores matemáticos de la historia, y los matemáticos no calculan: piensan...
Lo que hizo Gauss fue lo siguiente:
Tenía que sumar los siguientes números:
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + ... + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100
Pero nadie le obligaba a sumarlos por orden. Gauss se percató de un hecho singular: si agrupaba los números por parejas, tomando el primero y el último, el segundo y el penúltimo, etc., tenía lo siguiente:
(1 + 100) = 101; (2 + 99) = 101; (3 + 98) = 101; (4 + 97) = 101; etc.
Es decir, todos los pares de números sumaban 101. Como entre el uno y el 100 podía hacer 50 pares con esa propiedad, 50 x 101 = 5050.
Mas tarde, aplicaría este mismo principio para hallar la suma de la serie geométrica y muchas otras series.

OTRO TRUCO DE ADIVINACIÓN

Este truco es bastante sencillo, pero no es un truco que se pueda improvisar en un momento, a no ser que tengas una gran capacidad de cálculo o una memoria prodigiosa. El truco es el siguiente: deberás enseñar las siguientes columnas.

A	B	A	B	A	B	A	B
1	9	2	10	4	12	8	12
3	11	3	11	5	13	9	13
5	13	6	14	6	14	10	14
7	15	7	15	7	15	11	15
I		**II**		**III**		**IV**	

Pedir a alguien que piense en un número del 1 al 15. Pedir que señale en cuales de las cuatro columnas aparece ese número. Para adivinar el número solo tendrás que sumar los números marcados en rojo de las columnas que señalen.

Ejemplo: Si han pensado en el número 7, señalarán las tres primeras columnas, sumando los tres números de la columna A, tendrás 1 + 2 + 4 = 7.

Explicación: En la primera carta están todos los números cuyo último dígito en el sistema binario es 1; la segunda contiene todos los números cuyo segundo dígito por la derecha es 1 (en el sistema binario), la tercera y la cuarta lo mismo. Los números marcados en rojo son las potencias de 2. Por lo tanto, cuando señalan las columnas, están indicando el desarrollo en binario del número elegido (aunque ellos no lo sepan).

¿SABEN MATEMÁTICAS LAS ABEJAS?

Puede parecer una pregunta tonta, pero ¿saben matemáticas las abejas?.Este hecho ya fue constatado por Papus de Alejandría, matemático griego que vivió del año 284 al 305.

Su afirmación se basaba en la forma hexagonal que imprimen a sus celdillas las abejas para guardar la miel.

Las abejas, cuando guardan la miel, tienen que resolver varios problemas. Necesitan guardar la miel en celdillas individuales, de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas, ya que hay que aprovechar el espacio al máximo.

Solo podrían hacerlo con triángulos, cuadrados y hexágonos. ¿Por que eligieron entonces los hexágonos, si son mas difícil de construir?.

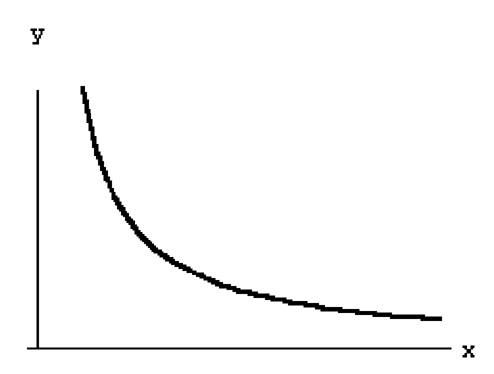
La respuesta es un problema isoperimétrico (del griego "igual perímetro"). Papus había demostrado que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados. Por eso, la figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el círculo, que posee un número infinito de lados.

Por eso las abejas construyen sus celdillas de forma hexagonal, ya que, gastando la misma cantidad de cera en las celdillas, consiguen mayor superficie para guardar su miel.

La pregunta es: ¿y quien le enseñó esto a las abejas?....

UNA GRÁFICA MUY CURIOSA

La función a la que me refiero es muy sencilla, se trata simplemente de la función inversa de x, es decir, de $y = 1 / x$, cuya gráfica es la siguiente:



Pues bien, Torricelli descubrió en 1643 que el sólido de revolución generado al rotar esta curva alrededor del eje x desde $x = 1$ hasta $x = \infty$ tiene volumen finito. Esto causó una auténtica sorpresa en su tiempo y el filósofo inglés Thomas Hobbes llegó a decir en 1672:

"Para entender este sin sentido no hace falta que una persona sea lógico o geómetra, sino que esté loco"

Hobbes, por otro lado, gran filósofo y orador político, solía atacar teoremas matemáticos como si su validez fuera cuestión de invectivas y retórica, como en la política.

Una vez creyó haber hallado la cuadratura del círculo y la publicó en 1655. Wallis hizo notar su error y esto originó una fuerte pelea de ataques y sarcasmos entre ambos que duró casi un cuarto de siglo.

Mas sorpresa le habría causado sin duda el saber que además tiene una superficie de área infinita. Es decir, si construyéramos una jarra de plástico con esta forma, la podríamos llenar de agua, pero necesitaríamos infinitos botes de pintura para poder pintarla.

¿POR QUÉ SE EQUIVOCA TANTO EL HOMBRE DEL TIEMPO?

Hay cierto anuncio por la televisión (de compresas, para mas señas), en el que una chica pregunta con cara sorprendida ¿por que se equivoca tanto el hombre del tiempo?, como si los pobres meteorólogos no pusieran interés en su trabajo, etc.

El problema es que tratamos todos los días con el tiempo. La gente lee en los periódicos que está calculados todos los eclipses posibles en varios miles de años, que están calculadas todas las trayectorias de numerosos cuerpos celestes con una precisión muy alta, etc. Luego, ¿como es posible que no puedan calcular si va a llover mañana o no?.

Las ecuaciones que rigen el tiempo en cualquier parte del mundo están perfectamente calculadas: son ecuaciones con variables tales como temperatura, presión atmosférica, humedad relativa del aire, velocidad del viento, etc. Todas estas variables se funden en un conjunto de ecuaciones mas o menos complejas y que con potentes ordenadores es factible resolver. Pero sigue habiendo un margen alto de errores en predicciones meteorológicas que vayan más allá de unos pocos días. ¿Cual es la razón?.

La razón es que las ecuaciones que rigen el tiempo forman un sistema caótico. Un sistema de ecuaciones es caótico cuando una pequeña variación en las condiciones iniciales, produce un resultado totalmente diferente en la solución del problema. Para calcular el tiempo que hará mañana, necesitamos, evidentemente, saber como está el tiempo el día de hoy. La temperatura en este instante será un valor inicial que habrá que introducir en las ecuaciones para saber el tiempo que hará mañana.

Vamos a ver esto muy bien con un ejemplo muy sencillo:

Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales en dos variables:

$5x + 7y = 0.7$

$7x + 10y = 1$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones lineales, obtenemos las soluciones

$x = 0$, $y = 0.1$

Vamos a perturbar un poco el sistema, es decir, vamos a poner un sistema de ecuaciones que varíe muy poco respecto al anterior. El sistema es:

$5x + 7y = 0.69$

$7x + 10y = 1.01$

Hemos variado en 0.01 la suma de las dos ecuaciones con respecto a las ecuaciones originales. Es de esperar que una variación tan pequeña en las ecuaciones hará que la diferencia entre las soluciones sea también pequeña. Sin embargo, si resolvemos este último sistema de ecuaciones veremos que las soluciones son:
x = -0.17; y = 0.22 que se diferencian en bastante mas que la perturbación que hemos causado. Esto sucede así porque el sistema no es estable o está mal condicionado. Mirando la siguiente gráfica se adivina fácilmente por qué sucede esto:

Se han exagerado las proporciones para apreciar mejor los detalles. Las rectas mas finas corresponden al primer sistema de ecuaciones, y las más gruesas al segundo. Señalados con un punto negro están las soluciones de ambos sistemas.
La diferencia tan grande entre las soluciones ocurre porque las pendientes de las gráficas son muy parecidas, por tanto, cualquier mínima variación en las dos rectas hace que varíe mucho el punto de intersección.
Cuando resolvemos las ecuaciones que rigen el tiempo, ocurre algo parecido, una mínima variación en los datos iniciales hace que varíe mucho el resultado. Se podría pensar que esto se solucionaría siendo mas precisos en la toma de los datos iniciales: por ejemplo, midiendo la temperatura con una gran precisión: el problema es que nunca medimos la temperatura con una precisión absoluta: usamos aparatos tales como termómetros, etc., y siempre tenemos un margen de error. Este margen de error puede ser suficiente para obtener un resultado diametralmente opuesto.
Esta peculiaridad de los sistemas caóticos se conoce como "el efecto mariposa", ya que se afirma que el aleteo de una mariposa en Hong-Kong (es decir, una perturbación muy pequeña) puede hacer que esta tarde llueva en Londres.

BIBLIOGRAFIA

- Victor Gómes Castro ; RAZONAMIENTO MATEMÁTICO ; Editorial "SAN MARCOS"; Segunda Edición; Lima – Perú; 2003.
- Guillermo Martínez Gabaldoni; ARITMETICA PRACTICA Editorial INGENIERIA E.I.R.L.; Lima – Perú.- 2004
- Jose Huisa de la Cruz ; MANUAL DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO; Editorial "SAN MARCOS" ; Lima – Perú; 2002.
- Proyecto Ingenio; ARITMETICA ; Editorial LUMBRERAS, Lima – Perú; 2003.
- Mario Silva Santisteban ; ARITMETICA ; Editorial "SAN MARCOS" , Segunda Edición; Lima – Perú; 2002.
- Manuel Coveñas Naquiche ; ; RAZONAMIENTO MATEMÁTICO ; Editorial "SAN MARCOS"; Segunda Edición; Lima – Perú; 2003.